**Análisis Matemático III.**

**Examen Integrador. Primera fecha. 13 de diciembre de 2018.**

| 1 | | 2 | | 3 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | a | b | a | b | a | b |
| | | | | | | | |

*Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.*

**Ejercicio 1.**

**(a)** Explicar por qué $f(z) = \operatorname{sen} z$ es la única función entera tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

**(b)** Especificar el conjunto de valores reales positivos $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ para los cuales $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(x+1)^\alpha}{x^\beta(1+x^\gamma)}dx$ converge. Calcular esta integral en el caso $\alpha = 1$, $\beta = 1/4$ y $\gamma = 2$.



**Ejercicio 2.**

**(a)** Sea el problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u(0,t) = 5 & t \geqslant 0 \\ u(\pi,t) = 3 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = 2\operatorname{sen}(4x) + a\,x + b & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

Obtener valores $a$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que el desarrollo en serie de la solución tenga un número finito de términos. Resolverlo para los valores $a$ y $b$ elegidos.

**(b)** Calcular la serie exponencial de Fourier (dejando expresados sus coeficientes en forma integral) de $f(t) = \begin{cases} 1+2t & \text{si} \quad -1 \leqslant t < 0 \\ 1-2t & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$ y verificar su convergencia uniforme en el intervalo $[-1,1]$.

**Ejercicio 3.**

**(a)** Obtener la expresión de la transformada de Fourier de $f'$ en términos de la transformada de Fourier de $f$, introduciendo las hipótesis necesarias y, demostrar su validez.

**(b)** Plantear un problema que modelice la temperatura $T$ de régimen estacionario en una lámina plana y homogénea que ocupa la región del semiplano superior del plano $xy$ si la temperatura sobre cada $x$ del eje real es $\dfrac{1}{x^2+4}$.

**Ejercicio 4.**

**(a)** Dada $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [3k, 3k+1) \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$, $k \geqslant 0$. Demostrar que $f$ es seccionalmente continua y de orden exponencial. Calcular la transformada de Laplace de $f$, especificando su dominio de convergencia.

**(b)** Resolver el siguiente sistema utilizando transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x''(t) + y'(t) = 2H(t) \\ -x'(t) + y'(t) = 3H(t) \end{cases} \quad \text{con } x(0^+) = x'(0^+) = 0,\ y(0^+) = 1$$

siendo $H(t)$ la función de Heaviside.